わかやま子ども学総合研究センタージャーナル　No.3, pp.53-62, 2022

算数科教育の教材としてのハノイの塔
―「変わり方」の授業の事例研究を通して―

Tower of Hanoi as a Teaching Material of Mathematics Education: A Case Study on Teaching of　“hanges in Quantities”

山本紀代　島川伸一※1

※1 和歌山市立藤戸台小学校

知育玩具のひとつとして知られている「ハノイの塔」は、高校数学の「数列」で用いられる教材でもある。最短手順の増え方から規則性を見つけることは、小学生でも十分可能な思考法である。第４学年「変わり方」の指導は、中学校数学の関数につながる内容として「数学的な見方・考え方」を鍛える重要な単元である。この単元において、発展的な学習として「ハノイの塔」を扱い教材としての有用性を検証した。

キーワード：変わり方、２量の関係、表を読む、言葉の式、一般化

1　はじめに

ハノイの塔は、1883 年にフランスの数学者Ｅ. Lucas（リュカ）が考案したゲームであると言われている。バラモンの塔または ルーカスタワー(Lucas' Tower)とも呼ばれ、その起源は 5000 年前のインドにさかのぼる。場面の設定やその成り立ちには諸説があり、様々な伝説が存在している。

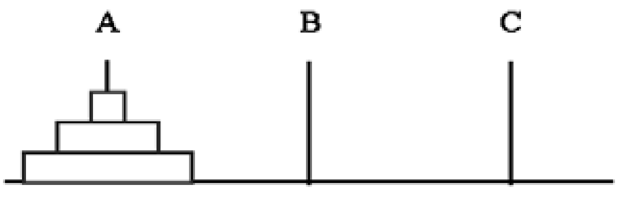

図１　n＝３の場合

知育玩具として日本国内外で広く知られており、カラフルに色付けされたもの、木製やプラスティック製のものなど、色や素材が多種多様な製品として販売されている。対象年齢は「１歳から高齢者まで」と表示したものもあるが、多くは３歳以上となっている。

日本では 1907 年（明治 40 年）に書かれた書物『世界遊戯法大全[1]』で紹介され、「何回移動すればいいか」という数学的な考察が書かれている。

ゲームは、横に並んだ３本の柱（端からＡ・Ｂ・Ｃ）があり、Ａの柱に直径が異なる円盤がｎ個大きいものが下になるように重ねている（図１）状態から始まる。その円盤をルールに従ってＣへ移動させ、完成までの時間や移動した回数を競うものである。移動させるルールは、次の３点

[1] 松浦政泰 編（1907 年）ハノイの塔やタングラムなど、算数・数学教育の教材として使われているものを含め、トランプやオセロゲームの原型、花札や百人一首など国内外の遊びが 800 以上紹介されている。遊びの紹介や遊び方の解説だけでなく、歴史的背景や攻略法、数学的考察など詳細に説明されている。
国立国会図書館デジタルコレクション
https://dl.ndl.go.jp/info:ndljp/pid/860315　2022 年２月１日閲覧

である。
・一度に１枚の円盤しか移動できない
・小さい円盤の上に大きな円盤を置けない
・３本の柱 A、B、C 以外の場所に円盤を置けない
本来のルールに従って、円盤を移動させるゲームとして n ＝２から始めれば幼児期から十分楽しめる玩具である。一方、n を大きく設定し、移動が完成するまでの時間の短さや手順の少なさを競うのであれば、年齢に関係なく大人も楽しめるゲームである。

ハノイの塔は、ゲームを楽しみながら「最短手順」を求める数式を扱う数学の教材として取り扱われている。具体的には、高校数学の B で数列の漸化式の単元において複数の教科書で取り上げられている[2]。また、高等学校の数学の実践例[3]が研究内容として取り上げられ、中学校数学でも「文字式の決まりを見いだす」授業実践や「数学的な規則性や法則を見つけるゲームとしての紹介」がされており、教材としての有用性が認められている。

しかし、算数科では積極的に取り上げられていないのが実状である。本稿では、「ハノイの塔」を算数科の教材として取り上げる位置づけについて考察することを目的とする。第２章では、領域「変化と関係」における教材としての位置付けを考察する。第３章では、第２章を根拠に実践を行い検証する。

2　教材としての位置づけ

2.1　算数科の目標との関連

現行の学習指導要領では、各教科等の特性に応じた「見方・考え方」が重視されている。また、小・中・高の目標の冒頭文は、「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を次のとおり育成することを目指す」と全て同じ表現で統一され、育成を目指す資質・能力が校種によって異なっている。

算数科の目標において育成を目指す資質･能力のうち「思考力、判断力、表現力等」に関しては、「日常の事象を数理的に捉え見通しをもち筋道を立てて考察する力、基礎的・基本的な数量や図形の性質などを見いだし統合的・発展的に考察する力、数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表したり目的に応じて柔軟に表したりする力を養う。」とある。

ハノイの塔を教材として用いる意義は、この「思考力、判断力、表現力等」に値すると考える。

先ず、「見通しをもち筋道を立てて考える」資質・能力の育成に関して考察する。円盤を最短の手順でルールに従って移動するためには、少なくとも次の移動を予想する必要がある。n＝３の場合、第 1 手で小の円盤を置く位置は２箇所ある。B に置いたとすれば、２手目は中の円盤を C に置くしかない。すると次の手は B の円盤を C に置くしか方法がない。すると大の円盤は、B に置くことになり C に移動するには、２つの円盤をさらに移動しなければならない。最も少ない手順で大の円盤を C に移動するためには、最初の１手目から次の移動を考えなければならない。結果にたどり着くまでの過程を予測するのは、次への見通しをもち筋道を立てて考察する思考力であり、ハノイの塔の数学的活動としての意味をもつところであると考える。

次に、「数学的な見方・考え方」に関わる指導として、円盤の数（n）と手順の関係を考える活動の設定である。円盤の数を増やしていくことにより、手順がどれだけ増えるのかを予想し、確認する。その結果を考察する手段として「表」に表すことを知る一連の指導が、これに相当する。

「表」は、数学的な表現のひとつであり、集めた資料を分析的に見るための方法として扱えるよう指導する。「表」を読む知識・技能[4]を獲得し、規則を見つけだす過程において数や量の変化をどこから捉えるか、何に着目して関係性

[2] 北山他（2017）「算数・数学教育の教材としてのハノイの塔の考察と拡張」『和歌山大学教育学部紀要－教育科学－』第 68 集より「文部省検定済みの１５種類の数学 B の教科書のなかで、３冊でハノイの塔が取り扱われている」
[3] 谷崎　美穂（2014）「数学B　数列～漸化式の理解を深めるために～」啓林館 HP　高等学校　数学　授業実践記録 アーカイブ一覧 https://www.shinko-keirin.co.jp/keirinkan/kou/math/jissen_arch.html　2022 年 2 月 1 日閲覧
早苗　雅史　教材「ハノイの塔」を用いた授業実践　izumi-math.jp/M_Sanae/hanoi_m/hanoi_m.htm　2022 年 2 月 1 日閲覧
[4] 育成を目指す知識・技能の１番目「数量や図形などについての基礎的・基本的な概念や性質などを理解する ともに、日常の事象を数理的に処理する技能を身に付けるようにする。」

を見いだすか等の数学的な見方・考え方が育成される。見つけだした規則を簡潔・明瞭・的確な数学的な表現「式」[5]に表す。こうした過程を構成する教材としての意味をもつのが「ハノイの塔」であり、教材としての有効性が認められる。

先行研究において、高橋（2003）は、ハノイの塔は、主体的な算数・数学的活動を促し、最少の手順数を求めるために表を用いて、プレート（円盤）の数がｎ枚の場合を求めようという考えから 2^n-1 という一般化にいたる良い教材であることを述べている。

また、山本(2013)は、ハノイの塔を教材とした実践から、問題解決型の学習には空間表象の発達が必要であり「具体的操作活動→映像的操作→形式的操作」という問題解決の過程を経て、児童は問題解決能力を向上させていくことを検証した。

以上の点から、ハノイの塔は、算数科で目指す資質・能力を育成するための教材として有用性があると考える。

2.2　領域Ｃ　「変化と関係」との関連

「変化と関係」は、現行学習指導要領から上学年に新設された領域である。この領域の内容は、中学校数学の「関数」領域につながり、小学校と中学校の学習の円滑な接続をも意図している。ハノイの塔のゲームを通して「円盤の数と手順の数の関係」を「式に表す」一連の学習は、領域「変化と関係」のねらいに一致するものだと考える

領域のねらいのひとつは、次のとおりで下線部がハノイの塔の学習に関する部分である。

・伴って変わる二つの数量の関係について理解し、変化や対応の様子を表や式、グラフに表したり読んだりするとともに、二つの数量の関係を比べる場合について割合や比の意味や表し方を理解し、これらを求めたりすること

小学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説　算数編では、この領域で働かせる数学的な見方・考え方に着目して整理したものを表１として示している。この表の指導内容から、指導に適切な学年を考えると、第４学年が該当する。

表１　「C 変化と関係」の内容の外観

数学的な見方・考え方	・二つの数量の関係などに着目して捉え、根拠を基に筋道を立てて考えたり、統合的・発展的に考えたりすること		
	伴って変わる二つの数量の変化や対応の特徴を考察すること	ある二つの数量の関係と別の二つの数量の関係を比べること	二つの数量の関係の考察を日常生活に生かすこと
4　学　年	・表や式、折れ線グラフ	・簡単な割合	・表や式、折れ線グラフ
5　学　年	・簡単な場合についての比例の関係	・単位量当たりの大きさ ・割合、百分率	・簡単な場合についての比例の関係 ・単位量当たりの大きさ ・割合、百分率
6　学　年	・比例の関係 ・比例の関係を用いた問題解決の方法 ・反比例の関係	・比	・比例の関係 ・比例の関係を用いた問題解決の方法 ・比

表１の列は、この領域で育成を目指す資質・能力を示しており、左端「伴って変わる二つの数量の変化や対応の特徴を考察すること」がハノイの塔の教材化に関係する。その内容は、この領域の中核である「関数の考えの基礎」となるところである。「関数の考え」は、以下に示す３つの過程を通して生かされる。（小学校学習指導要領　解説　算数編 2017）

第１の過程は、二つの事柄の関係に着目すること。関係に着目することで、その間の依存関係を調べることになる。

第２の過程は、二つの事柄の変化や対応の特徴を調べることを通して、二つの事柄に関係性が存在するかどうか検討することである。伴って変わる二つの事柄を、言葉、図、数、表、式、グラフを用いて表すことにより、変化の様子や対応の規則性をより詳細にとらえやすくなり、変化や関係の規則性を読み取る手段を獲得できる。

第３の過程は、第１・第２の過程により獲得した内容を表現し、異なる場面で活用することである。

この３つの過程をハノイの塔を教材とした学習に当てはめてみる。生活（ゲーム）の中から規則性を発見したり、順序立てて考えたりするという算数の見方・考え方を見つけるのが、この学習の前提である。

[5]　数学では、数学的帰納法の考え方や漸化式等を用いた数列領域として考える。算数科では、数量の関係を言語表現のまま演算記号で表すことや、言葉と数字が混在した関係を演算記号で表したものも「言葉の式」での「式表示」と考える。

授業の導入前に、「ハノイの塔」というゲームの紹介を行い、各自がゲームを体験する時間を設定する。円盤の数を増やしゲームに慣れる過程において、ただゲームを楽しむのではなく、「勝つためには、できるだけ少ない手順」で移動することの必要性を感じさせるための時間設定である。

ここから前述した第１の過程が成立する。つまり「二つの事柄（円盤の数と手順）の関係」に着目し、円盤の数が n 個の時に完成する手順の最少数が勝敗に関わることに気づかせる。円盤の数が n の時、最少の手数で移動を完了することが、勝ちにつながることが分かれば、二量の依存関係を調べようという課題が生じるのではないかと考える。

第２の過程がここから始まる。前半は、主として個人での活動と思考が中心となる。児童にとっては、最少の手順を競うゲームであることを押さえ、円盤の数が１ずつ増えるとゲームのレベルが上がることを知らせる。円盤の数に対応する手順を数え記録することで、二量の値を数値化する。その結果は、個人が操作したものであるため、最少の手順であるという確証はない。互いに値を共有し、異なる手順の数の箇所はみんなで再度確認しながら操作することで検証する。この活動により、円盤の数に対応する手順の数が確認できる。具体的な展開計画は以下に示す。

「結果を整理し、整理したものを考察する。考察することにより二量の関係を見いだす。」領域の中心となる学習は、個々の結果を検討することから始まる。個人の結果を出し合い、比較、検証、修正しながら二量の関係を考察する協同学習によって思考が深められる。

個別に調べた結果を比較検討する場合、円盤の数と手順の数を対応する二つの量と考え、表に表すことで全員の結果を確認する。手順の数が異なる場合は、全員で確認の作業を行う。代表者が円盤を動かす操作を、全員が観ることにより、手順の最少値を確定することに至る。

また、個人で円盤を動かす作業においても、数学的な見方・考え方が養われる。一つは、円盤を移動する回数の記録方法である。予想される児童の方法の主なものは次の３つであろう。

① 書き残すことをせずに、念頭で「いち、に、・・・」と数えていき、最後の数だけを記録する

② 簡単な絵図で円盤と３本の棒をかき、手順を追っていく様子を、図に残す（図２[6]）。

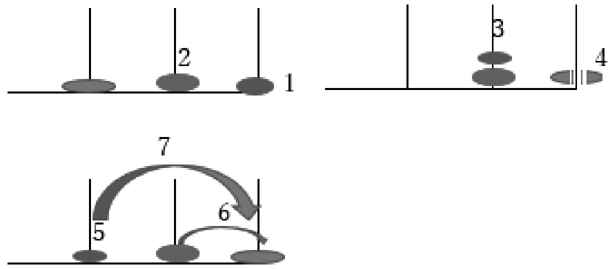

図２　予想される図の例

③ 円盤を移動するたびに「正」の字を書くように残す。

円盤の数が１ずつ増えるのに対し、手順の数の増え方は単純ではない（表２）。円盤の数が１増えると、手順の数が大きく増えることを、児童はゲームを進めながら実感するであろう。

表２　円盤の数と手順の数

円盤の数	2	3	4	・・・	n—1	n
手順の数	3	7	1 5	・・・		

円盤の数が３個までは、ほとんどの児童が正しく最少の手順の数を見つけられるであろう。しかし、円盤が４個になると、思いつくままに円盤を移動させていると、操作活動と手順の数を数えることを並行して行うことが困難になる。手順の数を記録する上記①②③の方法に限界を感じるであろう。手順の数を手際よく数えることや、円盤の移動方法を工夫する必然性が生じる。

円盤の移動に規則があることは、操作の途中で気づくこともあるだろうが、図を見直すことからも発見につながる。図２を分析し構造的に見直すことである。

例えば、n＝３の場合について図 ２ を見直す。手順３までは、n＝２から見つけることが可能である。これは、n＝２の場合と同じ形である。手順４の後は、n＝２と位置が左右逆になっているだけで、動かし方や手順は同じであることが分かる。つまり、

[6] はじめには、左端の棒に下から青（大の円盤）赤（中の円盤）緑（小の円盤）と円盤が置かれている。その状態から、動かす場所と順番（手順の数）に、絵と番号をかいていく様子を予想した一例。上左の図では、右端の小の円盤の絵と数字の１は、最初に動かす円盤の位置が右端で、手順数が１であることを示す。右の図は、小の円盤を中の円盤の上に、大の円盤を左から右の棒に移動した図。下図は、まず、小の円盤を左へ移し、中の円盤を大に重ね、続けて小の円盤を中の上に重ねて完成することを示す。

円盤の数が３枚の場合

3（円盤が２枚の時の手順数）＋１（増えた円盤の数）＋３（円盤が２枚の時の手順数）＝７となる。

同様に考えていけば、全て移動することなく手順が最少となる値を見つけることができる。

操作活動をより効率的に行おうと考えることは、数学的な思考につながる能力のひとつである。このことからも、ハノイの塔が数学的活動としての価値をもつゲームであることが認められる。

円盤の数を４から５に増やし、最少の手順の数が確認できたことにより、対応する２量の値が３組完成した。ここから、二量の関係を「対応として見る」、「変化として見る」という表を読むことの学習が始まる。この領域の核となる内容である。

表２より、円盤の数が、２から３に１増えると、手順は「３⇒７」となり4増えている。円盤の数が３から４に１増えると、「7⇒15」と手順は8増えている。円盤が５になると、手順は31になり16増えている。第４学年の児童にとって、この数値から規則性を見つけるのは、学習内容の範囲を超えている。ここでは、「2^n」を見つけることが目的ではない。「４→８→16」という数の変化を改めて見直す経験を重視したい。例えば、４＝２×２、８＝２×２×２、16＝２×２×２×２など、数をいくつかの数の集合として見直すことは、発展的な学習として今後の学習活動を深める経験になると考える。

領域Ｃ「変化と関係」は、学習教材として日常の事象から数学的な要素を取り出しにくく、苦手意識につながりやすい一面がある。「結果を見通すことや規則性を見つけると繰り返し同じようにゲームを進めることができる」のがハノイの塔である。ゲームを通して数学的な見方・考え方を養うことのできる教具である。また、変わり方の発展的な学習にもつながる教材としての広がりがある。以上のことから、ハノイの塔を第４学年　領域Ｃ 変化と関係の教材として用いることに意義があると認められる。

2.3　単元での位置づけ

関数の考えを単元として扱うのは、第４学年が初めてである。二量の関係について考えることから始まり、単元を通して、下学年で学習した意味とは異なる表やグラフの見方を学ぶ単元である。一般的な単元の構成を指導順に示したのが図３である。番号は、１単位時間で行う指導の順番を示し、続く文は、その時間の目標である。

①　伴って変わる二つの数量について知る。（「和が一定」の関係）
②　伴って変わる二つの数量を調べるための表について知る。（「比例」の関係）
③　伴って変わる二つの数量の関係を、表に表したり、○や△を使った式で表したりして調べる。（比例のグラフ）
④　表から変わり方のきまりを見つけ、問題を解決する。
⑤　二量の関係をグラフに表し、グラフを読む。
⑥　適応題を解く。

図３　一般的な「変わり方」の単元構成

ハノイの塔は、「活用・発展」学習として⑥の過程で扱う。

ハノイの塔の変わり方を概観したとき「何かきまりのようなものがありそう」と気づく児童は多いであろう。また、どのようなきまりか、規則性に近いものを見つけようとする児童もいると予想する。しかし、どのような規則なのかを明確に表現できる児童は少ないであろう。規則性をどのように表現するか、その方法を具体化する必要がある。例えば、前節の効率のよい手順に関係する言葉を使った式であれば、円盤がｎ枚の時＝（n―１枚の時の手順の数）＋（増えた１）＋（n―１枚の時の手順の数）ができ、n枚の時＝（n―１枚の時の手順の数）×２＋１・・①

という式に変形することができる。

また、表からひとつ前の手順の数の２倍に１を足した数になっていることに気づけば、①と同じ式ができる。

一方、表の手順の数だけに着目すると、

円盤が２枚の時の手順の数３＝２×２―１

円盤が３枚の時の手順の数７＝2×2×2×―１

という気づきから「円盤がn枚の時の手順の数=2を円盤の数だけ繰り返しかけていって１引く」ことを見つける可能性もある。

同じ状態や関係を表す式での表現は、多様である。言葉の式もその一つで、数字と記号以外でも成立する。ハノイ

の塔を算数科で教材として扱う例として、今回は第４学年の「変わり方」の発展課題と考えた。発達段階や既習内容から「式表示」を数字と記号に言葉を含めた「児童が共有できた表現」と広義に捉えている。いわゆる数学で使用する文字・数字・記号のみで表現することだけが式表示と捉えず、その前段階として、「関係を見つけ、できるだけ簡潔に表現する」ことをねらいとする。したがって、必ずしも累乗にこだわる必要はないと考える。

身近な遊びの中から「算数」を見つける経験の一つとしてハノイの塔を教材として扱う。

3　授業の実際

3.1　時期・対象・授業者

単元を通した授業は、2022 年 1 月下旬から 2 月上旬の算数の時間に実施した。ハノイの塔を教材とした授業は、２月４日の午前中教科外の時間にゲームを楽しみ、同日の午後に授業実践を行う予定であった。諸事情により、実践授業が２月 10 日に延期された。

対象は、和歌山市内の公立小学校第４学年１組の児童 30 名である。

授業は、学級担任が通常の時間割通りに行った。

3.2　単元の指導

単元の目標に応じた問題を、教科書（啓林館）の課題に従って進めた。単元の展開で留意した事柄は、以下の通りである。(指導案より抜粋)

『本単元の指導にあたっては、段階を追って、変数についての理解を深めるようにする。

初めに、伴って変わる二つの数量について表にまとめることを知らせる。表にまとめることで、変化の特徴に気づき、その良さを感じさせる。

出来上がった表の変化の特徴からきまりを見つけさせる。表の見方では、横に見ることと、縦に見ることの二つの視点があることに気づき規則性を見つけさせる。こうした学習により、表を読み取る力が身につくと考えられる。』

表３は、図３の単元構成に対応させた学習内容である。当初、ゲームを授業時間として扱うことも検討したが、十分遊ばせる経験が円盤の数と手順の数という二量に意識が向きやすいと考えた。児童がゲームについて、「円盤が増えると難しくなる。」「もっとはやくクリアする方法はないのかな。」等の思いをもったまま授業につなげたいと第 6 時の直前に教科外としてハノイの塔のゲームで遊びを設定した。ところが、授業までに期間が６日空いてしまったことで、児童の意識が変化する可能性があり、事前に予想した児童の思考を再考した。

表３　単元構成と学習内容

時	学習内容
1	・ノートのマスを使って周囲の長さが１８ｃｍの長方形を作り、縦と横の関係を式に表したり、表に書いて調べたりする。 ・表からわかることを、いろいろな角度から読み取る。
2	・周りの長さが一定の長方形の縦と横の長さの関係、○や△を使った式に表す。
3	・階段状に並べた正方形について、段の数が増えるときの周りの長さの変わり方を表に表して調べ、きまりを見つけて式に表す。
4	・変わり方のきまりを表にかいて調べ、表から見つけた変わり方のきまりを使って問題を解く。
5	・水槽に一定量ずつ水を入れていったときの水のかさと全体の重さの関係を折れ線グラフに表し、変わり方の様子を調べる。
6	・ハノイの塔の手順について、円盤の数に対応する最少の手順の数を調べる。(本時)

以下、単元の経過に沿って板書と特徴的な児童のノートを紹介する。

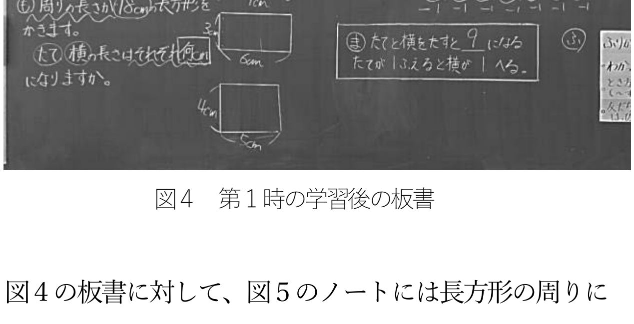

図４　第１時の学習後の板書

図４の板書に対して、図５のノートには長方形の周りに長さを示す数字が書かれている。

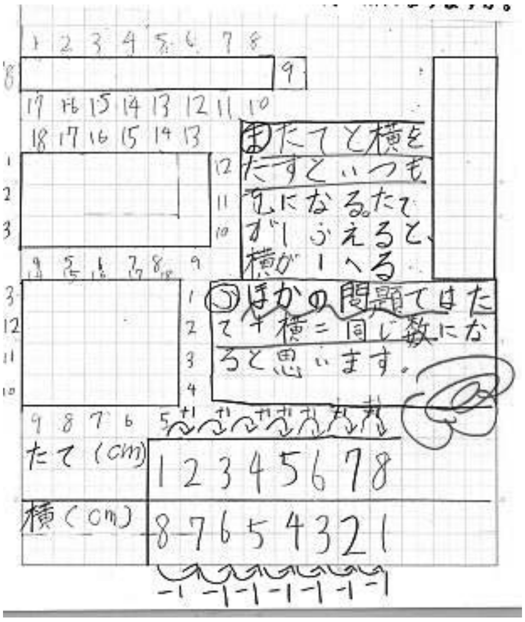

図５　第１時の児童のノート

図５のように、周囲に番号をつけているのは、この児童だけである。周りの長さが変わらない事を確認しようとした本児らしい工夫がされた図である。表の上下すべてに「＋１」「―１」と書き加えている。このように学習の対象に自ら働きかけていくことを評価し、他の児童にも広がるよう紹介している。また、振り返り（ふ）には、「長さが変わっても、周りの長さと縦と横の長さの関係は同じになる」ことを言葉の式で一般化して表すなど、発展的に考えようとする記述が見られた。主体的に学習に取り組もうとする姿がうかがえる。

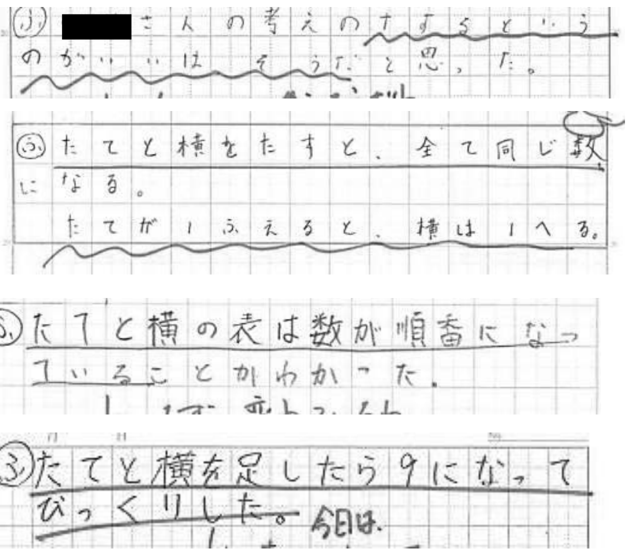

図６　第１時のノートより「振り返り」の抜粋

単元導入の振り返り（ふ）は、「ずらすというのがいい」「数が順番になっている」「上と下を足したら全部同じ数」など、その児童の言葉で表現されていた。

第３時は、比例関係の定数を求め一般式を導く。定数が求めやすよう課題設定は、分離量である。

第４時までは、表を使って規則性を見つけ一般化した「式」に表す学習である。図３からこの単元のねらいは「比例関係の理解」にある。導入は、二量の関係のなかで連続量での和が一定の関係を扱った。比例関係でないものを扱うことにより、「二量の関係」に着目し「比例関係」の特徴が明確になる。連続量の課題であることから、和が９になる組み合わせは無数に考えられる。しかし、児童の実態や既習事項からは、整数値の範囲に限定される。

第５時では課題設定に連続量を取り上げ、グラフに表すことを指導する。表をグラフに表すことにより、変化の仕方を視覚的にとらえられるようにすることが目的である。表わされたグラフは、右上に直線が伸びていることが分かる。この直線の意味を考えることにより「変わり方」のひとつ「比例関係」の理解が深まる。これは４年生の折れ線グラフの単元で習った統計のグラフとは異なり、ｘ軸、ｙ軸の２数の関係性を表わしている関数のグラフである。このことをふまえ、両者の違いを意識することを指導の重点にした。直線上のどの点にも値が存在するという関数的な読み方ができるように、児童の気づきが深まることを重視した。

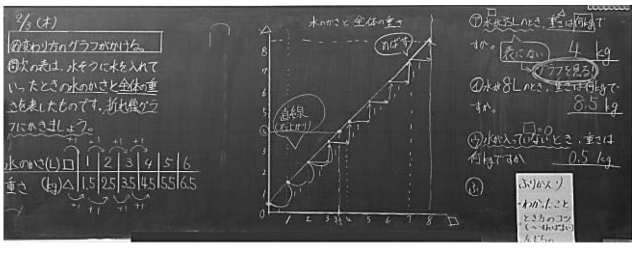

図７　第５時の学習後の板書

ここでは、課題と表とグラフを関係づけることを丁寧に扱った。また、伴って変わる二量の関係を○や△など記号で表すことを通して、一般化することの意味を知り、その表現として「式」で表わすことへと導いた。

こうした指導過程を重ねることにより、表やグラフが関係を見つけるための思考ツールになることが期待される。直線でかかれたグラフを第３学年で「折れ線グラフ」と学習していることから、この単元でも直線でかかれたグラフ

は「折れ線グラフ」と表現することになっている。図５のノートにもみられるように直線上の値が存在することを理解し、「折れ線グラフ」とは直線の意味が違うことに気づいている。

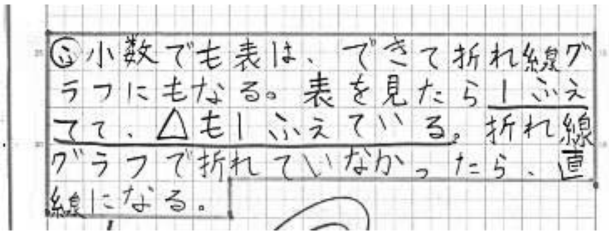

図８　第５時の児童のノート

他にも振り返りに「グラフは、たてと横をみると変わり方がわかった」「グラフに（値が）ないときは、線をのばす」「折れ線グラフからも答えがわかる」など、既習の折れ線グラフと二量の関係を表したグラフとの違いを記述した振り返りが見られた。

この単元を通して重視するのは、表、グラフ、式（一般化した式を含む）のどれかを使って、伴って変わる二量の関係性を表すことや、言葉の式を含む「自分の表現」で関係性を説明することである。算数の様々な表現方法は、毎時間その表現の全てを使うことが目的ではない。その場面設定に応じて表現方法を選ぶことができる力も身が重要だと考える。

３.３　本時の指導（2022 年２月 10 日指導案は別紙参照）

ハノイの塔を教材とするとき、ゲームそのものが数学的活動になる。数学的活動を設定する重要な要素は、「何を」「どのタイミングで」「どれだけ行うか」である。

効果的な数学的活動のツールとして PC を用いた。ハノイの塔のプログラムを作成し、個々の児童が自分の PC でゲームができるよう設定した。個人思考の場面では自分のペースで円盤を操作し手順を考えることができ、一斉学習では、異なる考えがあれば納得するまで操作して確認することができる。個々の思考過程や思考方法に合わせた数学的活動ができ、個別と協働の深い学びの可能性を広げるツールになると考えた。

本時指導の直前に設定したハノイの塔のゲームを楽しむ時間から、連続して算数の授業に入る計画であったが、急な予定変更により授業までの時間が長く空くことになった。図９のように次々とゲームを進めていくことで、円盤を移動する「最少回数」に意識が高まっている。予定外の時間の経過が生じたことが、児童の意識や意欲、思考の変化に与える影響を探るという、新たな課題も生じ本時の指導が行われた。

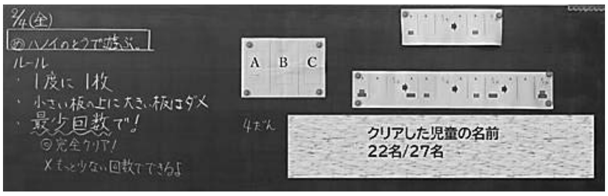

図９　前時（授業外）ハノイの塔を楽しむ時間の板書

【単元の指導と児童の実態】

導入で円盤の数と手順の数を表に表し、決まりを見つける５分間の個人思考の後の場面

T_1まず、分かるきまりを教えてもらうよ。そのあとヒント出してもらおうかな。

$C_1$１から３に２ずつ増えている。

C_2上が増えたら下は４増えている。

$C_3$３から４。

C_4たす１されたら３。

T_4まずは、横を見るよな。横に見たら□は？

$C_5$１ずつ増える。

$T_2$１増えているやんな。△は？

C_6次の倍数増えている。

５分間の個人思考で、表を多様な視点から読むことができ単元での学習の成果が見られる。C_1から C_6までの児童の発言から、表を読み取る力や数学的な表現力（C_4・C_6）には個人差が見られる。理解の程度に差は見られるが、これまでの指導により、児童が規則性を見つけるためのツールとして表を使おうとしていることが読み取れる。

【規則性を見つける場面と児童の実態】

塾や家庭学習等により、学習内容が学校よりも進んでいる児童がいるため、知識の量の差が大きい。既に学習を終えている児童も初めて学習する児童も積極的に参加できるよう「分かる人はヒントを出す」機会を設けている。

T_{11}きまりがわかった人は式まで書こう。
これがわかったら５．６．７・・できるよな。

C_{12}まずは下の最少回数の＋２、＋４、＋８ってところに
注目して、その式には絶対にその式に共通している数

字があって、それでかけ算を使っている。

C_{13} 2＋2＝4

：

C_{20}ふたご同士の足し算。

C_{21} 7から＋されるから・・・

C_{22}そういう意味か！15 と 16 やから・・・ここはわかるやろ？

C_{23}15+16＝31

：

C_{26}7段でこの数やったら１０段すごい数になる。

児童の「スゴイ増える！」「どえらい数になるで！」などといった急に大きな数になることを発見したという意味のつぶやきが、数人から聞こえた。

C_{27} 6段の数が頼りになる。

C_{28}決まり見つけた。

この後、「前の手順の数に１加えた数を足した数が、次の手順の数になる」というきまりを見つけ、記号を使った式や言葉の式にまとめた。

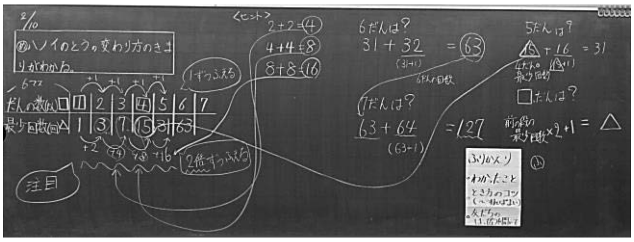

図 10　本時の板書

C_{12}の考えを C_{20}が「ふたごどうしのたしざん」という言葉に言い換えたことで、「同じ数」が注目された。この後、児童が数字をあげて説明していることから、この言葉が規則性を見つける大きなヒントになったことが分かる。指導者は C_{20} の後「同じ数をたす」「２倍する」と算数の表現に言い換えたが、板書としてはあえて書かなかった。規則性を見つける重要なキーワードのひとつであるため、関連する発言を C_{21} 以後の児童が自分の言葉で説明することを優先した。

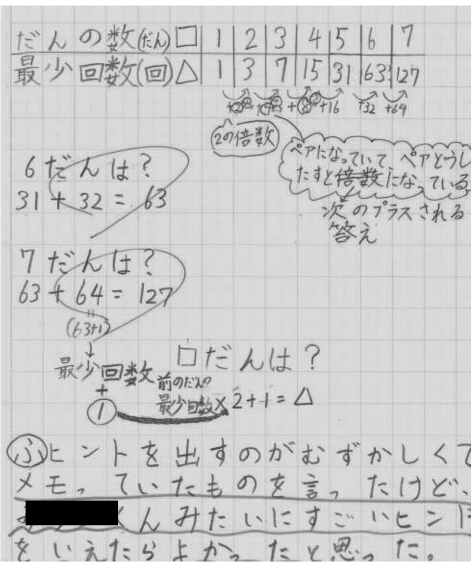

図 11　本時指導後のノート

児童のノートには、自分が分かりやすい表現なのであろうか発言にはなかった「ペア」という言葉に言い換えてかかれている（図 11)。図 11 のノートには、「2 の倍数」が表でも〇で囲み強調されている。こうした表現からも C_{20} の発言から規則性につながる発見があったと考える。

4　まとめと考察

ハノイの塔は、既習内容をさらに踏み込んで考察しなければならない教材である。この領域の指導内容そのものが数学的な思考力を特に必要とするだけに、単元全体を通しての系統性のある丁寧な指導が重視される。今回の実践では導入部からの指導が二量の変わり方を考える素地となって、ハノイの塔の考察に至ったものと考える。累乗を扱う式表示はできなくても、（前の手順の最少数）×２＋１＝（次の手順の最少数する）という言葉を使った式であれば第４学年の知識で十分理解できる内容である。同じ教材を第６学年で用いれば、（２を円盤の数と同じ回数かけて１を引く）という関係にまでたどり着ける可能性も高い。低学年の児童であれば、ルールに従ったゲームそのものを楽しむことで算数につながる素地作りが期待できる。

引用・参考文献

北山秀隆、南拓弥、西山尚志, 田川裕之, 鷲山峻大, 山本紀代 (2018)「算数・数学教育の教材としてのハノイの塔の考察と拡張」『和歌山大学教育学部紀要―教育科学―』　第 68 集　第 1 巻 pp.189-196

早苗雅史　教材「ハノイの塔」を用いた授業実践　izumi-math.jp/M_Sanae/hanoi_m/hanoi_m.htm　2022 年２月１日閲覧

清水静海他（2019）『わくわく算数』啓林館

高橋等 (2003) 「子どもの算数・数学的活動を大事にする、湧き出させる」『上越数学教育研究』18 号 pp.31-48

谷崎美穂 (2014)「数学Ｂ　数列～漸化式の理解を深めるために～」啓林館　https://www.shinko-

keirin.co.jp/keirinkan/kou/math/jissen_arch.html 2022年2月1日閲覧
松浦政泰 編（1907）『世界遊戯法大全』国立国会図書館デジタルコレクション 2022年2月1日閲覧
山本博和（2013）「空間表象能力の発達に基づく算数教育の在り方」『The Journal of Social Welfare』16-2 pp.93-102
文部科学省（2017）『小学校学習指導要領（平成29年告示）解説　算数編』　東洋館出版

【資料】　本時展開　＊紙面の都合により、一部省略

（1）本時の目標　・変わり方のきまりを、表の数字に着目して見つけることができる。

（2）学習の展開

過程	主な発問や指示（〇）予想される子どもの反応（・）	指導上の支援と留意点（●）と評価（☆）
つかむ	〇前回、ハノイの塔を遊びました。どんな結果になりましたか。 ・1段…1回　・2段…3回 ・3段…7回　・4段…15回 〇今日はこのハノイの塔の変わり方について、考えていきましょう。 ㋱ハノイのとうの変わり方のきまりがわかる。	●ハノイの塔で遊んだ結果を表にまとめる。 段 | 1 | 2 | 3 | 4 | … 数 | 1 | 3 | 7 | 15 | … ●児童が発言したところまで記入する。
解決する	〇では、5段のときは、最低何回で移動させることができるでしょうか。＜自力解決をする＞ ・表に書き込む　　・パソコンでハノイの塔をする ・数に奇数しかない　・2,4,8と増えている　・倍の関係でない ・足しても引いてもできない　・前の段の数×2＋1でできる。 （15×2+1=31　5段のとき31回）	●表からわかることを、できるだけ書きこむように指示する。 ●ノートに書いてある数字のどこに着目すればよいか考えさせる。 ☆思変わり方のきまりを表にかいたり、数学的活動から見つけようとしたりしている。 ＜ノート・活動＞
練り上げる	〇わかった人は、考えている途中の人にヒントを出しましょう。 （階差に着目） ・表中の数字を見るのではなく、増えた数字に着目する ・増えた数字がどんな数で増えているかを見て。 ・2，4，8と増えているから、次は何の数字が来るか。 （回数に着目） ・3段と4段の回数の関係を見てみて。 ・数が倍になってる感じ。（×2＋1） ・回数はどこ見ても奇数になる。 〇5段の答えは何でしたか。　・31段	●答えを言わせないようにすることで、表のどこを見ればよいかを児童の言葉で着目させる。 ●ヒントという形で発表させることで、児童同士のつながりを意識させる。 （理解している児童は、相手により伝わる伝え方を、思考中の児童は、何が伝えたいのかをくみ取ろうとする力をはぐくむ） ●わからない人に挙手させ、全員が理解できるようにする。 ●発表者の観点を整理し、観点が混じらないように注意して、発表させる。 ☆知段の数が1，2，3,…と増えるとそれに伴って移動の数が2^n-1ずつ増えることを表にかいて見つけることができる。＜発言・ノート＞
まとめ	〇5段を求めるとき、どんな方法で求めましたか。 ・前の段で増えた数の2倍を、足したらできる。 ・前の段×2＋1でできる。	●児童が見つけた増え方のきまりを、児童のことばでまとめる。
練習課題	〇では、まとめを見ながら、6段では、何回で移動できるかを解きましょう。	●表に増え方を記入させることなど、図表を使って解くことを意識させる。
振り返り	〇今日学習して分かったことをノートに書きましょう。	●きまりを見つけるためにどんなことをしたのかを書かせるようにする。