わかやま子ども学総合研究センタージャーナル　No.7, PP.81-86 2026

カプレカル数の教材化について

About the Teaching Materials of Kaprekar Number

原　義則

本稿では、カプレカル操作およびカプレカル数を紹介し、2 桁および 3 桁の整数の場合を整理する。特に、3 桁の整数におけるカプレカル操作を教材として活用する可能性について考察する。さらに、10 進法以外の n 進法への拡張についても取り上げる。

キーワード：カプレカル数、 n 進法、整数の問題、学習過程のイメージ

1　カプレカル操作・カプレカル数とは

2 桁以上の整数 n に対して、各位の数字を並べ替えてできる最大の数から最小の数を引く操作を、カプレカル操作（Kaprekar operation）と呼ぶ。

たとえば、4 桁の整数を 6173 とする。各位の数を並べ替えてできる最大の数は 7631 であり、最小の数は 1367 である。この最大の数から最小の数を引くと、7631 − 1367 = 6264 となる。

$$\begin{array}{rcccc} & 7 & 6 & 3 & 1 \\ - & 1 & 3 & 6 & 7 \\ \hline & 6 & 2 & 6 & 4 \end{array}$$

整数 n に対してカプレカル操作をすることを $K(n)$ と表す。この例は

$$K(6173) = 6264$$

と表される。

もちろん、各位の数がすべて同じとき（3 桁の整数では、111,222,⋯,999）は、カプレカル操作をすると 0 になる。また、各位の数に 0 が含まれるとき、たとえば、100 ならば最大の数が 100 で最小の数が 001 とする、350 ならば最大の数が 530 で最小の数が 035 として操作をする。

このとき、カプレカル操作をして元の数に戻る数 n をカプレカル数（Kaprekar number）という。つまり、n がカプレカル数ならば、

$$K(n) = n$$

となる。

たとえば、元の数を 6174 とすると、

最大の数は 7641 で最小の数は 1467 である。

$$\begin{array}{rcccc} & 7 & 6 & 4 & 1 \\ - & 1 & 4 & 6 & 7 \\ \hline & 6 & 1 & 7 & 4 \end{array}$$

$$K(6174) = 7641 - 1467 = 6174$$

となるので、6174 はカプレカル数である。

カプレカル操作によって得られた整数を、繰り返しカプレカル操作する場合がある。

たとえば、整数を 6175 とすると、

$$K(6175) = 7651 - 1567 = 6084$$
$$K(6084) = 8640 - 0468 = 8172$$
$$K(8172) = 8721 - 1278 = 7443$$
$$K(7443) = 7443 - 3447 = 3996$$
$$K(3996) = 9963 - 3699 = 6264$$
$$K(6264) = 6642 - 2466 = 4176$$
$$K(4176) = 7641 - 1467 = 6174$$

整数 6175 にカプレカル操作を 7 回すると、カプレカル数 6174 になる。

2　2 桁の整数の場合

ここでは 2 桁の整数の場合を整理する。たとえば、整数を 35 とすると、

$$K(35) = 53 - 35 = 18$$

カプレカル操作の連鎖を考えると

$$K(18) = 81 - 18 = 63$$
$$K(63) = 63 - 36 = 27$$
$$K(27) = 72 - 27 = 45$$
$$K(45) = 54 - 45 = 09$$
$$K(09) = 90 - 09 = 81$$

となり、ループすることが確認できる。

図 1 と図 2 は、すべての 2 桁の整数に対してカプレカル

操作を行ったときの結果をまとめたものである。

図１は、2 桁の整数にはカプレカル数は存在しないことを表しており、カプレカル操作を繰り返すと、その結果がループすることを示している。また、37 と 73 は、カプレカル操作において最大の数と最小の数が明らかに同じになるので同一視している。

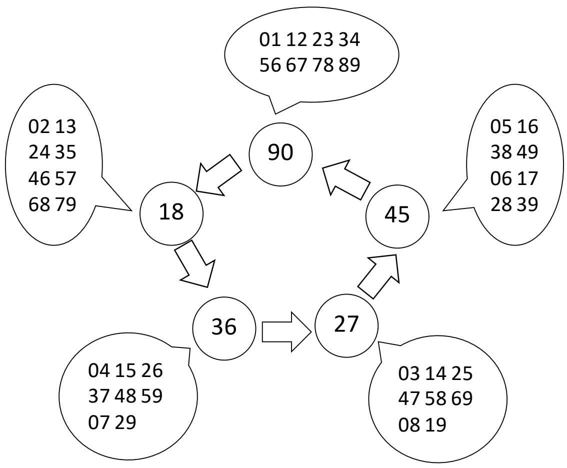

図１

図２は、図１を表にしたものである。図２のように右下がりの列になる。二つの数の差によってカプレカル操作の結果が分かれることを示している。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

図２

2 桁の整数をカプレカル操作する「数学の事象」を体験することは、「十の位と一の位を入れ替えて、大きい数から小さい数を引く」とよいので、小学生にとっても容易である。さらに、得られた結果をまとめることによって、「数学化」し、いくつかの「数学的に表現して問題」を得ることができる。たとえば、「2 桁の整数にカプレカル操作を行うと 9 の倍数か 0 になる」、「2 桁の整数の場合は、差の値がループしてしまうので、カプレカル数は存在しない」などである。これらの問題は、図２のようにすべての場合をつくすことによって正しいことが証明できる。

中学生にとっては、すべての場合をつくして証明する方法と、文字を利用して一般的に証明する方法の二通りの証明を学ぶことができる。さらに、文字式の有用性を学ぶことができる好例である。

【問題１】

2 桁の整数にカプレカル操作をすると 9 の倍数か 0 になる。

【証明１】

文字で２桁の数を ab とする。つまり、

$ab = a \times 10 + b \ \ (a > b)$

とし、カプレカル操作をおこなう。最小の数は

$$ba = b \times 10 + a$$

であるから、差は

$$ab - ba = (a - b) \times 9$$

となる。

【証明終】

【問題 2】

２桁の整数の中にはカプレカル数はない。

【証明 2】

【問題 1】より、２桁以下の整数のうち９の倍数は、

09、18, 27, 36, 45,

90, 81、72, 63、54

の 10 個あるけれど、カプレカル操作を考えると上段の 5 個を確かめればよい。

$$K(09) = 90 - 09 = 81$$
$$K(18) = 81 - 18 = 63$$
$$K(27) = 72 - 27 = 45$$
$$K(36) = 63 - 36 = 27$$
$$K(45) = 54 - 45 = 09$$

となり、差がループすることがわかる。

よって、２桁の整数の中にはカプレカル数はない。

【証明終】

3　3 桁の整数の場合

ここでは３桁の整数の場合を整理する。

たとえば、整数を 494 とすると、

$$K(494) = 944 - 449 = 495$$

$$K(495) = 954 - 459 = 495$$

$$K(496) = 964 - 469 = 495$$

495 はカプレカル数である。

【問題 1】、【証明 1】の形式と同様に考えると、

【問題 3】

3 桁の整数にカプレカル操作をすると 99 の倍数か 0 になる。

【証明 3】

3 桁の整数を abc（$9 \geq a \geq b \geq c \geq 0$）とする。最大の数は abc で、最小の数は cba だから、

最大の数

$$abc = a \times 10^2 + b \times 10 + c$$

最小の数

$$cba = c \times 10^2 + b \times 10 + a$$

と表されて、

差は

$$(a - c) \times 10^2 + c - a$$
$$= (a - c) \times 99$$

よって、99 の倍数となる。

$a > c$ のときは、99 の倍数、$a = c$ のときは、0 になる。

【証明終】

【問題 4】

3 桁の整数の中で、カプレカル数は唯一 495 だけである。

【証明 4】

【問題 3】より、3 桁以下の整数のうち、99 の倍数は、

99, 198, 297, 396, 495,

990, 891, 792, 693, 594

の 10 個あるけれど、カプレカル操作では上の段の 5 個の場合を確かめれば充分である。

$$K(099) = 990 - 099 = 891$$

$$K(198) = 981 - 189 = 792$$

$$K(297) = 972 - 279 = 693$$

$$K(396) = 963 - 169 = 594$$

$$K(495) = 954 - 459 = 495$$

よって、495 はカプレカル数である。

さらに、3 桁の整数はカプレカル操作を繰り返すと必ず 495 になる。

【証明終】

別の証明も考えられる。

【問題 5】

3 桁の整数のうち、495 はカプレカル数である。

【証明 5】

最大の数を abc、

最小の数を cba、

差を xyz とする。

$$\begin{array}{rccc} & a & b & c \\ - & c & b & a \\ \hline & x & y & z \end{array}$$

さらに、x, y, z は、a, b, c のいずれかと一致するとする。

このことから、各桁に対して、次が成り立つ。

$$\begin{cases} a - 1 - c = x \\ 10 + b - 1 - b = y \\ 10 + c - a = z \end{cases}$$

2 桁目の計算から $y = 9$ となり、$a = 9$ となる。

$$\begin{cases} 8 - c = x \\ 1 + c = z \end{cases}$$

大小関係により、

$$z = b$$

$$x = c$$

となるので、

$$\begin{cases} 8 - c = c \\ 1 + c = b \end{cases}$$

より

$$c = 4$$
$$b = 5$$

よって、カプレカル操作をすると

$$K(954) = 954 - 459 = 495$$

となり、495 がカプレカル数となる。

【証明終】

ただ、【証明 5】では、すべての 3 桁の整数はカプレカル操作を繰り返すと 495 に至ることはいえていないことに注意しよう。

4　n 進法への応用

10 進法ではなくて、他の n 進法ではどうだろう。n 進法のカプレカル操作を $K_n(\quad)$ で表す。

8 進法で点検する。例えば、527 $_{(8)}$ のとき、

$$K_8(527) = 752 - 257 = 473$$

繰り返しカプレカル操作すると

$$K_8(473) = 743 - 347 = 374$$

$$K_8(374) = 743 - 347 = 374$$

となり、カプレカル数は 374 $_{(8)}$ で存在する。

【問題 6】

8 進法の 3 桁の整数では、$374_{(8)}$ がカプレカル数である。

【証明 6】

【証明 3】、【証明 4】の 10 進法の手続きと同様に証明する。

$$a \times 8^2 + b \times 8 + c$$

$$0 \leq c \leq b \leq a \leq 7$$

とすると、

最小の数は

$$c \times 8^2 + b \times 8 + a$$

引くと

$$(a-c) \times 8^2 + c - a$$

$$(a-c)(8^2-1) = (a-c) \times 63$$

となるので、差は

64（$=1 \times 8^2 + 0 \times 8 + 0$）

から、

511（$=7 \times 8^2 + 7 \times 8 + 7$）

までの 63 の倍数になる。

063　（ $= 0 \times 8^2 + 7 \times 8 + 7$ ）

126　（ $= 1 \times 8^2 + 7 \times 8 + 6$ ）、

189　（ $= 2 \times 8^2 + 7 \times 8 + 5$ ）、

252　（ $= 3 \times 8^2 + 7 \times 8 + 4$ ）、

315　（ $= 4 \times 8^2 + 7 \times 8 + 3$ ）、

378　（ $= 5 \times 8^2 + 7 \times 8 + 2$ ）、

441　（ $= 6 \times 8^2 + 7 \times 8 + 1$ ）、

504　（ $= 7 \times 8^2 + 7 \times 8 + 0$ ）

よって、この 7 つの候補があるが、前半の 4 つの場合を調べればよい。

$$K_8(077) = 770 - 077 = 671$$

$$K_8(671) = 761 - 167 = 572$$

$$K_8(572) = 752 - 257 = 473$$

$$K_8(473) = 743 - 347 = 374$$

よって、$374_{(8)}$ がカプレカル数である。

【証明終】

【証明 7】

最大の数を$abc_{(8)}$、最小の数を $cba_{(8)}$、差を $xyz_{(8)}$ とし、x, y, z の数は、a, b, c のいずれかと一致するとする。

$$\begin{cases} a - 1 - c = x \\ 8 + b - 1 - b = y \\ 8 + c - a = z \end{cases}$$

２桁目の計算から $y = 7$ となり、$a = 7$ となる。

$$\begin{cases} 6 - c = x \\ 1 + c = z \end{cases}$$

大小関係により、

$$z = b$$

$$x = c$$

となるので、

$$\begin{cases} 6 - c = c \\ 1 + c = b \end{cases}$$

より

$$c = 3$$
$$b = 4$$

よって、カプレカル操作をすると

$$K_8(743) = 743 - 347 = 374$$

となり、$374_{(8)}$ がカプレカル数となる。

【証明終】

【問題 7】

n 進法の 3 桁の整数では、n が偶数のときにカプレカル数がある。

【証明 8】

【証明 7】の手法を使えば、n 進法で、n が偶数のとき、3 桁の整数のカプレカル数を求める

$$n = 2m \quad (\ m, n \ \text{は整数} \ )$$

とし、最大の数を$abc_{(n)}$、最小の数を $cba_{(n)}$、差を $xyz_{(n)}$ とすると、

$$\begin{cases} a - 1 - c = x \\ n + b - 1 - b = y \\ n + c - a = z \end{cases}$$

２行目の計算から $y = n - 1$ となり、$a = n - 1$ となる。

$$\begin{cases} n - 2 - c = x \\ 1 + c = z \end{cases}$$

大小関係により、

$$z = b$$

$$x = c$$

となるので、

$$\begin{cases} n - 2 - c = c \\ 1 + c = b \end{cases}$$

より

$$c = \frac{n-2}{2} = m-1$$
$$b = m$$

よって、カプレカル操作をすると

$$K\big((n-1)m(m-1)_{(n)}\big)$$
$$= (2m-1)m(m-1)_{(n)} - (m-1)m(2m-1)_{(n)}$$
$$= (m-1)(n-1)m_{(n)}$$

となり、$(m-1)(n-1)m_{(n)}$　がカプレカル数となる。

【証明終】

これにより、

4進法のとき、

$$K_4(132) = 132$$

6進法のとき、

$$K_6(253) = 253$$

となることがわかる。

nが奇数であるn進法の場合は、カプレカル操作の連鎖はループする。

5進法のときは

$$K_5(242) = 422 - 224 = 143$$
$$K_5(143) = 431 - 134 = 242$$

7進法のときは

$$K_7(363) = 633 - 336 = 264$$
$$K_7(264) = 642 - 246 = 363$$

9進法のときは

$$K_9(385) = 853 - 358 = 484$$
$$K_9(484) = 844 - 448 = 385$$

となる。

5　教材化にむけて

ある数学的事象を授業の中で取り上げるとき、問題発見型になるように教材を整理するよう注意する必要がある。

遠山啓は整数の問題の良さを「数学セミナー」(1969年5月号）の「整数論のすすめー大学数学のバイパス」の中で、「①実験、②法則の発見、③法則の証明、④証明された法則の適用　という帰納から演繹までの一貫したプロセスをたどることができるのである。数学教育のなかで＜帰納ー演繹＞の完全なプロセスをたどるのにもっとも適した分野は整数論だ…」と述べている。

さらに、銀林浩は数学的問題解決の図式として「人間行動から見た数学」(明治図書出版 1982）の中で、次の図4を示している。

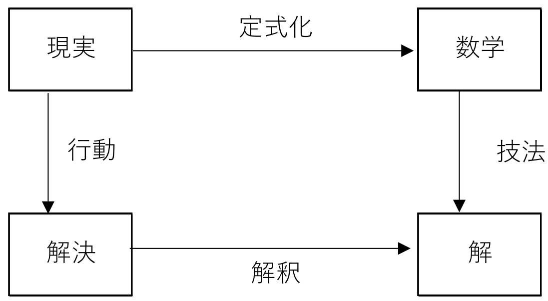

図3

また、中央教育審議会教育課程部会（2016),『算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ』別添資料4-3においても、次の算数・数学の学習過程のイメージ図5が示されている。

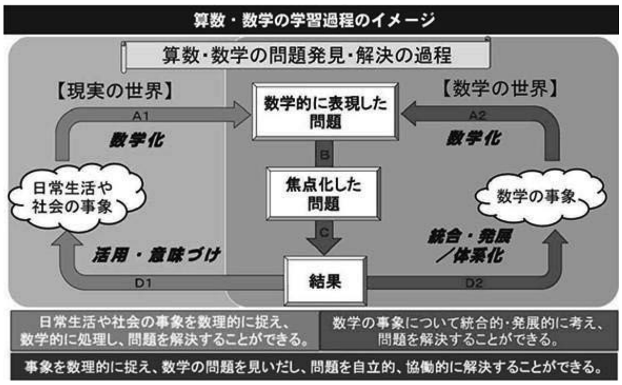

図4

カプレカル数の教材化も以上の学習過程の図式を念頭に、高校1年生に「3桁の整数にカプレカル操作を行い、カプレカル数を発見する」授業を行うことを考えてみる。

学習過程の大きな流れは以下のようである。

①（5分）3桁の整数のカプレカル操作を数学の事象として、例示し、定義する。

②　(15分）試行とまとめ。生徒が自ら選んだ3桁の整数でカプレカル操作をおこなう。その結果を聞き取り、その結果を板書していく。数学的な性質がわかるようになる回数まで繰り返す。

③（5分）試行、体験したことから、数学的な事象を取り出す。一人ひとりのさまざまな表現を大切にして聞き取っていくことを大切にし、数学的表現に収束することを急がないようにする。

「いくつかの答えしかない」

「差の種類は10種だけだ」

「3桁の整数でカプレカル数は475だけだ」

「3 つの数を足すと 18 になっている」
「2 桁目は必ず 9 だ」
「1 桁目と 3 桁目を足すと 9 になる」
「差は 99 の倍数だ」
「475 は 475 になる」
これが出たら「カプレカル数」の定義を知らせる。

④　(5 分) カプレカル操作の答えがいくつかしかないことに気づくので、3 桁の整数の各位の数を文字で表したときを考えると問題を焦点化させる。

「99 の倍数だ」ということは生徒から出にくいと予想されるので、文字で考えたのちに結果の考察として、「3 桁の整数にカプレカル操作を行うと 99 の倍数となる。ただし、同じ数が 3 つのときは除く」と数学的な表現にまとめる。

⑤　(10 分) 【問題 3】、【問題 4】の証明を行う。

⑥　(5 分) すべての場合を尽くして解答を得ることもできるけれども、場合が多すぎるので、文字を利用した解法を考えた。文字を利用することの有用性を知らせよう。

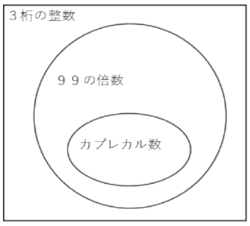

図 5

また、すべての 3 桁の整数　から 99 の倍数を選び、その中からカプレカル数を探し出す方法だったことも強調したい。

6　その後の発展

その後の授業の流れは四つ考えられる。

①　【証明 5】の方法を知らせて、8 進法のときにも 3 桁の整数のカプレカル数が存在することを証明する流れ。

②　整数の問題で、答えを絞り込んでいく問題をする流れを考えることができる。

たとえば、整数の性質に関する発展的課題として扱える次の２題が考えられる。

「3 以上 9999 以下の奇数 a で、 a^2-a が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ」(東京大学 2005)

「 $a^3-b^3=65$ を満たす整数の組 (a,b) をすべて求めよ」(京都大学 2005)

③　カプレカル操作はプロセスが明快なので、プログラミングするよい練習になる。4 桁以上になると手計算では手に負えなくなるので、コンピュータを利用して全数調査することが必要となってくる。ここでは、Excel で 3 桁の整数のときを例示する。

A1　：
A2　：　=INT(MOD(A$1,1000)/100)
A3　：　=INT(MOD(A$1,100)/10)
A4　：　=INT(MOD(A$1,10))
A5　：　=LARGE(A$2:A$4,1)
A6　：　=LARGE(A$2:A$4,2)
A7　：　=LARGE(A$2:A$4,3)
A8　：　=A$5*100+A$6*10+A$7
A9　：　=A$7*100+A$6*10+A$5
A10　：　=A$8-A$9

④　4 桁、5 桁と桁数を増やしたときにどうなるかは、探求学習のよい課題になるだろう。

7　まとめ

以上のようにカプレカル操作は、操作の仕組みが単純で、誰にでも取り組みやすい。そのため、問題を発見し、解決の過程を生徒たちが自覚化しやすい教材であることがわかる。「数学するとはどういうことか」このことを生徒たちに明示できる。小学生には小学生なりに、中高生には中高生なりの適応した教える内容を含んでいる。カプレカル数を通して、整数の問題の楽しさ、数学の楽しさを子どもたちに伝えていきたいと考えている。

参考文献

亀井哲治郎(2021)　「6174 は「カプレカル数」と呼ぼう！」『数学教室』4 月号 No.826　pp.72-73

銀林浩(1982)　『人間行動から見た数学』　明治図書出版

中央教育審議会教育課程部会「算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ　別添資料 4-3」https://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/073/sonota/__icsFiles/afieldfile/2016/09/12/1376993.pdf　2025 年 10 月 24 日閲覧

遠山啓(1981)　『数学のたのしさ』遠山啓著作集数学論シリーズ第 7 巻　太郎次郎社

西山豊　「6174 の不思議」　https://yutaka-nishiyama.sakura.ne.jp/gihyo/column2.pdf　2025 年 10 月 24 日閲覧

Ｚ会ソリュ-ションズ/Ｚ会編集部　「数学ＩＡ2023 年用第 8 回」『パワーマックス共通テスト対応模試』